Title	統計力学(III)(講義ノート)
Author(s)	久保, 亮五
Citation	物性研究 (1965), 3(5): 350-365
Issue Date	1965-02-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/85660
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

講義ノート

統計力学（Ⅲ）

久　保　亮　五（東大理）

§6　Markoff pvocess（前回につづく）

t，xともにdiscreteである場合について、前回にのべたことを少し補足する。単位時間についての transition marix P_1 は、(6・12) にいつたように

$$\sum_{x'} (x' \mid P_1 \mid x) = 1 \tag{6.12}$$

をみたすから、横ベクトルφ_0を

$$\varphi_0 = (1, 1, \cdots \quad 1)$$

とすれば

$$\varphi_0 P_1 = \varphi_0 \tag{6.21}$$

すなわち固有値問題 (6・13) は少くとも一つ$\lambda=1$ の固有値をもつ。また、$t=0$ における分布確率を$\overline{W_0}(x)$，$t=n$ における分布確率を$\overline{W_n}(x)$とし、これらを縦ベクトル、$\vec{W}_0$，$\vec{W}_n$ とすれば

$$\vec{W}_n = P_1^n \vec{W}_0$$

したがつて (6・15) により

$$W_n(x) = \sum_\alpha \lambda_\alpha^n \psi_\alpha(x) \sum_y \varphi_\alpha(y) W_0(y) \tag{6.22}$$

もし $\lambda_0=1$，$|\lambda_\alpha|<1$ $(\alpha \neq 0)$ ならば$n\to\infty$では

$$W_\infty(x) = \psi_0(x) \sum_y \varphi_0(y) W_0(y) \tag{6.23}$$

すなわち、種々のxの実現確率は前述のように漸近的に (6・17) の固有函数

すなわち平衡分布に近づく。これは初期分布によらない。すなわちこの系は ergodic である。

$|\lambda_\alpha|=1$ の固有値が1以外にいくつかあるときは前にのべたように(6・18)の性質が成立つ。が、そのためには P_1 の対角要素に0であるものが二つ以上なければならない（伏見，確率論および統計論を見よ）。そのもつとも簡単な trvial な例は

$$P_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

であろう。くわしいことはここに省くが、P_1 の固有値が $|\lambda_\alpha|\leqq|$ であることの簡単な証明を加えておこう。φ を固有値 λ に属する固有ベクトルとすると

$$\Sigma\varphi(x')(x'|P_1|x)=\lambda\varphi(x)$$

$|\varphi(x)|$ の最大値を与える x を x_m とすると $\sum_x(x|P_1|x_m)=1$ によつて

$$|\varphi(x_m)|=|\varphi(x_m)|\sum_x(x|P_1|x_m)\geqq\sum_x|\varphi(x)|(x|P_1|x_m)$$

$$=\lambda|\sum_x\varphi(x)(x|P_1|x_m)|=|\lambda\varphi(x_m)|=|\lambda|\varphi(x_m)|$$

$$\therefore\quad |\geqq|\lambda|$$

markoff 過程は、一つの時点から次の時点への確率過程の発展が、先行するその時点だけできまり、それ以前の歴史をふくむ積分によらない。これは

$$\frac{dx\,i}{dt}=f(x_1\ ,\cdots x_n\ )\qquad j=1\ ,\cdots n$$

という形の決定論的な力学の発展の自然な拡張であり、逆に力学の方程式は古典でも量子力学でも、markoff 過程の範ちゆうに属まるといつてもよい。統計力学では、力学の因果的な発展をそのある射影でしかみないので、その Markoff 的性質は一般に失なわれる。しかし、同時に、時間の尺度を適当にのばせば、近似的に Markoff 性が回復される。巨視的現象が巨視的力学で記述されるのはまさにこれである。どんな条件でそのような記述が可能で

あるか、そこにどんなMarkoff 過程が現れるのか、また、markoff 過程に漸近しないもの、あるいは漸近する前のふるまいをどう取扱うのか、ということは非可逆過程の統計力学の一般的問題である。

§ 7　Fokker-Planck Equation

連続的な時間 t に対する Chapman-Kolmogoroff eq.

$$\frac{\partial P(x)}{\partial t} = \int (x|\Gamma|x')P(x')dx' \tag{7.1}$$

はある場合には連続変数 x に対する 2 階の偏微分方程式に書きかえられる。これは Fokker-planck eq. とよばれるが、物理のいろんな問題に現れるものであるから一般的に少し説明しておこう。(7.1)から、時間△ t のあいだでの transition probability が求められるが、これを

$$P(x', \triangle t \leftarrow x, 0) \tag{7.2}$$

としよう（以下の議論は stationary であることを必要としないが簡単にここでは stationary Process として扱かう）。(7.2)の確率による△ t のあいだでの変化 $\triangle x = x' - x$ の moment について

$$\begin{aligned}
&\lim_{\triangle t\to 0} \frac{\langle \triangle x \rangle_x}{\triangle t} = A(x) \\
&\lim_{\triangle t\to 0} \frac{\langle (\triangle x)^2 \rangle_x}{\triangle t} = 2B(x) \\
&\lim_{\triangle t\to 0} \frac{\langle (\triangle x)^n \rangle_x}{\triangle t} = 0 \qquad n \geqq 3
\end{aligned} \tag{7.3}$$

という条件が成立つとしよう。実際、random walk のような場合、これらの条件はみたされる。Markoff 過程の基本式

$$P(x, t+\triangle t \leftarrow x_0\ t_0) = \int P(x, t+\triangle t \leftarrow x'\ t)dx' P(x'\ t \leftarrow x_0\ t_0) \tag{7.4}$$

により

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t \leftarrow x_0\ t_0)$$

$$= \lim_{\triangle t \to 0} \frac{1}{\triangle t}\{\int P(x,t+\triangle t \leftarrow x' t)\,dx'\,P(x' t \leftarrow x_0 t_0) - P(x,t \leftarrow x_0 t_0)\}$$

いまR(x)をxの任意の函数としてこれにかけて積分する。そのとき、右辺の積分の第一項では

$$R(x) = R(x') + (x-x')R'(x') + \frac{1}{2}(x-x')^2 R''(x') + \cdots$$

を用いると

$$\int R(x)dx \frac{\partial}{\partial t} P(x t \leftarrow x_0 t_0)$$

$$= \lim_{\triangle t \to 0} \frac{1}{\triangle t} \int dx\, [\int dx' \{R(x') + (x-x')R'(x') + \frac{1}{2}(x-x')^2 R''(x') + \cdots\}$$

$$\cdot P(x,t+\triangle t \leftarrow x', t') P(x', t \leftarrow x_0 t_0) - R(x) P(x,t \leftarrow x_0 t_0)]$$

$$= \int dx' \{R'(x') A(x') + R''(x') B(x')\} P(x' t \leftarrow x_0 t_0)$$

$$= \int dx\, R(x) \{-\frac{\partial}{\partial x}(AP) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(BP)\}$$

(ただし$\int P(x, t+\triangle t \leftarrow x', t) dx = 1$ に注意。）またR(x)は部分積分した項が消えるよう、境界値は適当に零であるとする）となる。任意函数Rについてこれが成立つためには

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x t \leftarrow x_0 t_0) = -\frac{\partial}{\partial x}(A(x) P(x, t \leftarrow x_0 t_0)) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(B(x) P(x, t \leftarrow x_0 t_0)) \tag{7.5}$$

が成立たなければならない。これがFokker planck eq. であつて、拡散熱伝導はこの型に属する。もちろん、変数xが多次元であればxをベクトル、Aをベクトル、Bをテンソルとして拡張されなければならないが、それはあきらかであろうからここでは省略する。

Fokker—planck eq. が成立つのは、短かい時間のあいだでのxの変化が(7.3)の条件をみたすように確率的に充分小さい範囲にあることである。たとえば、△tのあいだの△xはきわめて小さい変化の集積であるような場合、（ブラウン粒子の拡散）この条件はみたされる。粒子の散乱がrandomなlong range 力の重なりから起るような場合（プラズマ）運動量変化は

微小なものの集積である。そのような場合に運動量変化は運動量空間での拡散として行なわれる。しかし、個々の散乱が short range 力の強い散乱であれば一回の運動量変化は大きいから、Fokker—planck eq を使うわけにはいかない。

II ブ ラ ウ ン 運 動

§8 Langevin 方程式

簡単のため1次元の運動を考えるが、多次元への拡張も読者にはほとんどあきらかであろう

ブラウン運動のもつとも古典的な例は液体中にただよう花紛やコロイド粒子などの運動である。ブラウン粒子にはたらく力は

$$K+F_s+F_r \tag{8.1}$$

と三つの部分にわけられる。Kは重力や電気力など、外部から与えられる力、

$$F=F_s+F_r \tag{8.2}$$

は液体分子がブラウン粒子に作用する力で、

$$F_s=-m\gamma u \tag{8.3}$$

はsystematic force とよばれる部分、すなわち、粒子の速度 u に対する粘性抵抗（$m\gamma$ は抵抗係数）F_rは全体の力からこれを除いたrandom な力である。Fはたんげいすべからざる液体分子の不規則な衝突に由来するから、確率的なものとして把握されるが、そのうちsystenaticな部分をF_sとして取出し、残りをF_rとしたわけである。したがつて

$$\langle F\rangle_u=-m\gamma u \tag{8.4}$$

$$\langle F_r\rangle=0$$

である。ここに$\langle\ \rangle_u$はブラウン粒子の速度 u が与えられているときの平均値でである。

以上の仮定により、ブラウン粒子の運動方程式は

$$\frac{du}{dt}=-\gamma u+f\ t \tag{8.5}$$

$$f(t)=F_r(t)/m$$

とかかれる。これはuに対する微分方程式であるが、f(t)はtのきまつた函数ではなく、random process である点でふつうとちがう。
したがつて、u(t)もまたrandam process である。このように、一つの基本となるrandom process からderive される他のrandom process を規定する方程式を、一般にStochastic differential eq. とよぶ。問題は与えられた基礎のprocess f(t)からu(t)をrandom process として定めるという数学的問題である。これは物理学の古い問題であり、それから確率過程論の一部門を形成した、Wiener の Brown motion の理論はその重要な部分をなしている。ここで数学に入るつもりはないが、この古典的な問題は非可逆過程論の一つの基本的例題として重要な意味をもつているからここでいささかこれを論じる必要があろう。

(8.5)の f(t)を与えられたtの函数として解くには

$$u(t)=e^{-\beta t}\,v(t) \tag{8.6}$$

とおけば容易に

$$u(t)=\int_{t_0}^{t} e^{-\beta(t-t')}\,f(t')\,dt'+u(t_0) \tag{8.7}$$

特に　　$t=-\infty$ で　　$=0$とすれば

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{-\beta(t-t')}\,f(t')\,dt' \tag{8.8}$$

random process f(t) のすべてのsampleはそれぞれrandom process u(t)のあるsampleに写像される。ブラウン運動としてふつう

(1)　f(t)はGaussian process である。

(2)　f(t)のcorrelation time τ_cは $1/\gamma$ にくらべてきわめて短かい。
すなわち

$$\gamma\tau_c \ll 1 \tag{8·9}$$

という二つの条件が仮定される。物理的にいうと、f(t)は多数の液体分子（ブラウン粒子は液体分子よりもずつと大きい）の不規則な衝突による。すなわち、

$$f(t)=\sum_{j=1}^{N} f_j(t) \qquad N \gg 1$$

（ここに f_j は一つの分子の衝撃）とかかれるわけである。つねにたくさんの分子がぶつかつてくる、という事情のもとに、中央極限定性が成立ち f(t)は Gaussianとみなされるわけである。第二に、τ_c は分子の衝突の時間の程度、すなわち molecular な時間であるのに対し、ブラウン粒子の運動の characteristic time $1/\gamma$ ははるかに大きい。これはオミコシをかつぐ子供たちの頭のうごきにくらべて、オミコシの動きははるかにのろくさいということである。(8·9)を idealizeすれば

$$<f(t_1)\,f(t_2)> \propto \delta(t_1-t_2) \tag{8·10}$$

というように、random farce f の correlation は無限小の時間しかない、ということになる。

もう一つ注意を加えておこう。(8·10) の仮定は (8·4)と独立ではない。ブラウン粒子をとりかこむ液体が、熱平衡にあるとする限りは、γ を定数とする抵抗 (8·4)を仮定するなら同時に (8·10) を要求しないと、一般的な fluctuation-dissipation theorem と矛盾するのである。これについては後にふれる機会があろうと思う。

(8·5)のような Stochantic eq. を取扱う代表的な方法としては、

(1) Chandrasekhar の方法

(2) Rice の方法

(3) Fokker-planck eq. の方法

等がある。1は時間を δt ごとの区間に区切り、

$$\Delta f_i = \int_{t_i}^{t_i+\delta t} f(t)\,dt$$

について radom walk の理論を用いるのであるが、一般性に欠けるのでここには述べない（Chadrasekhar Rev. Mod. phys. 15 1(1943) を見よ。）
(2)は定数係数をもち、random forceについて liner な stochastic eq. に対してはすこぶる有用な簡明な方法であつて多次元のプロセスについても容易に用いられる。(3)は必らずしも linear にな場合には限らない反面、最終的な解を求めるには偏微分方程式をとかなければならない困難がある。

§9 Correlation function と power specrum

ここでブラウン運動のみならず、時間をふくむ統計力学全般に重要な概念を導入しよう。

ある random process $x(t)$を $0 \leqq t \leqq T$ の時間について観察しよう。その一つの Sample を Fourier 分解すると

$$x(t) = \sum_n x_n \, e^{i\omega_n t} \tag{9.1}$$

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T} n \qquad (n = \text{integer}) \tag{9.2}$$

$$x_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i\omega_n t} \, dt \tag{9.3}$$

によつて Fourier 係数 x_n がきまる。random process $x(t)$ に対して、x_nはしたがつて randomvariable である。すなわち random process $x(t)$は randam variable の一つの set $\{x_n\}$に対応させられるわけである。いま簡単に

$$\langle x(t) \rangle = 0$$

とし、また $x(t)$は stationary process であるとしよう。このとき

$$\langle x_m \, x_n \rangle = 0 \qquad m+n \neq 0 \tag{9.4}$$

は容易に証明される。また（x が real であるとして）

$$\langle x_n x_{-n} \rangle \equiv \langle |x_n|^2 \rangle$$

$$=\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T<x(t_1)\,x(t_2)>e^{-i\omega_n|t_1-t_2|}dt_1\,dt_2 \qquad (9.5)$$

であるから

$$<x(t_1)\,x(t_2)>=\varphi(t_1-t_2) \qquad (9.6)$$

で (unnormalized) correlation function をまた

$$G_x(\omega)=\lim_{T\to\infty}T<|x_n|^2> \qquad (9.7)$$

によつてxの power spectwm $G_x(\omega)$ を定義すると (9.5) により

$$G_x(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T dx_1\int_0^T dt_2\,\varphi(t_1-t_2)e^{-i\omega_n(t_1-t_2)}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\{\int_0^T dt_1\int_0^{t_1}dt_2\,\varphi(t_1-t_2)e^{-i\omega_n(t_1-t_2)}$$

$$+\int_0^T dt_2\int_0^{t_2}dt_1\,\varphi(t_1-t_2)e^{-i\omega_n(t_1-t_2)}\}$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\{\int_0^T dt\,(T-t)\varphi(t)e^{-i\omega_n t}+\int_0^T dt\,(T-t)\varphi(-t)e^{i\omega_n t}\} \qquad (9.8)$$

のように変形される。いま correlation function $\varphi(t)$ が

$$\varphi(t)\to 0 \qquad (t\to\infty)$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^{\pm T}t\varphi(t)dt=0 \qquad (9.9)$$

という条件をみたすとすれば、(9.8)は

$$\left.\begin{aligned}G_x(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,e^{-i\omega t}\,dt\\ \text{また}\quad \varphi(t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G_x(\omega)\,e^{i\omega t}\,d\omega\end{aligned}\right\} \qquad (9.10)$$

を与える。すなわち power specram とcorrelation functionは互にFourier 変換に他ならない。(Wiener—Khintchins theorem)

(9.7)の意味は次のようである。有限のTについては振動数 ω_n は (9.2) のように $2\pi/T$ の間隔をもつから、フーリエ係数の強度 $<|x_n|^2>$ は

$\triangle\omega=2\pi/T$ のバンド幅にふりあてられるものである。$T\to\infty$ の極限において ω が連続に近づけば、

$$G_x(\omega)\propto \lim \frac{1}{\triangle\omega}<|x_n|^2>$$

が ω における強度である。もしはじめから ω を連続的に考えれば

$$x(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}\,dt$$
$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega \qquad (9.11)$$

というFourier 変換をあつかえばよい。そのときには

$$<x(\omega)x(\omega')>=2\pi G_x(\omega)\,\delta(\omega+\omega') \qquad (9.12)$$

となる。(9.5)から(9.8)をへて(9.10)を導くやり方は、非可逆過程の理論でしばしばお目にかかるものである。

(9.10)の簡単な且つ重要な例は

$$\varphi(t)=<x^2>e^{-\gamma|t|} \qquad (9.13)$$

$$G_x(\omega)=\frac{2<x^2>\gamma}{\gamma^2+\omega^2} \qquad (9.14)$$

である。simple exponenticl decay の correlation function は、Lorentzian の power specrum に対応する。これは記憶しておくべきことである。特に $\gamma\to 0$ すなわち(8.10)のようなdelta型correlationは G_x=const すなわち white specrum をもつ。

§ 10 Doob の定理

Correlation function の形について重要な一つの定理がDoob によって与えられている。stationary proces $x(t)$が gaussian且つ markoffian である場合にはそのcorrelation functionはまさに(9.13)の形

$$\varphi(t)\equiv<x(t_0)x(t_0+t)>=Ce^{-\gamma|t|} \qquad (10.1)$$

をもたねばならない。したがつてその power spectrum は Lorenzian である。

前にのべたように、多数の小さい原因の集積から或る一つの process は Gaussianになる。したがつてマクロあるいはセミマクロな物理的対象がGaussian process としてふるまうことは多くの場合に実現される。また、そのようなものがmarkoffianとしてふるまうことも、後にしばしば触れるようにマクロな時間尺度ではまことに尤もらしいことである。このような理由で、correlation function の simple decay と power spectrum の Lorentzian form は物理的にありふれた　したがつて重要なものになるのである。

Doob の定理は次のようにして証明される。x が Gaussian process であることから

$$C[\xi] \equiv \left\langle e^{i\int \xi(t')x(t')dt'} \right\rangle = e^{-\frac{1}{2}\iint \xi(t_1)\xi(t_2)\langle x(t_1)x(t_2)\rangle dt_1 dt_2} \tag{10.2}$$

特に

$$\left\langle e^{i\xi x(t)} \right\rangle = e^{-\frac{1}{2}\xi^2\langle x^2\rangle} \tag{10.3}$$

$$\begin{aligned} C(\xi_1\ \xi_2) &= \left\langle e^{i\xi_1 x(t_1)+i\xi_2 x(t_2)} \right\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}\xi_1^2\langle x^2\rangle-\frac{1}{2}\xi_2^2\langle x^2\rangle-\xi_1\xi_2\langle x(t_1)\,x(t_2)\rangle} \end{aligned} \tag{10.4}$$

x のある値 x′ が実現される確率は

$$W_1(x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle x^2\rangle}}\ e^{-\frac{x^2}{2\langle x^2\rangle}} \tag{10.5}$$

いま

$$Q_{12}(x_1, \xi_2) = \int dx_2 P(x_1 t_1 \to x_2 t_2)\, e^{i\xi_2 x_2} \tag{10.6}$$

とおくと

$$Q_{12}(x_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 C(\xi_1, \xi_2)\, e^{-i\xi_1 x_1} / W_1(x_1) \tag{10.7}$$

である。なぜならば、(10・4) の $C(\xi_1, \xi_2)$ は

$$C(\xi_1, \xi_2) = \int dx_1 \int dx_2\, e^{i\xi_1 x_1 + i\xi_2 x_2}\, W_2(x_1 t_1;\ x_2 t_2) \tag{10.8}$$

のように t_1, t_2 においてそれぞれ x_1, x_2 が実現される確率であり (10・6)

の$\mathbb{P}(x_1 t_1 \to x_2 t_2)$は

$$\mathbb{P}(x_1 t_1 \to x_2 t_2) = \frac{W_2(x_1 t_1 ; x_2 t_2)}{W(x_1)}$$

であるからである。(10・7)に (10・4) を入れれば

$$Q_{12}(x_1, \xi_2) = e^{-\frac{<x^2>}{2}\{1-R^2(t_2-t_1)\}\xi_2^2 + iR(t_2-t_1)x_1\xi_2} \tag{10・9}$$

ただし

$$R(t_2-t_1) = \frac{<x(t_1)x(t_2)>}{<x^2>} \equiv R_{12}$$

が得られる。x(t)がMarkoffian であるならば、$t_1 < t_2 < t_3$ に対して

$$\int p(x_1 t_1 \to x_2 t_2)\,dx_2\,p(x_2 t_2 \to x_3 t_3) = P(x_1 t_1 \to x_3 t_3) \tag{10・10}$$

でなければならない。ここで

$$\delta(x_2 - x_2') = \frac{1}{2\pi}\int d\xi'\, e^{i\xi'(x_2 - x_2')}$$

を用い、また両辺に$e^{i\xi x_3}$をかけてx_3で積分すると

$$\frac{1}{2\pi}\int d\xi'\,dx_2'\,Q_{12}(x_1\xi')Q_{23}(x_2'\xi)\,e^{-i\xi' x_2'} = Q_{13}(x_1\,\xi) \tag{10・11}$$

が得られる。(10・9) を入れると、左辺は

$$\exp\{-\frac{<x^2>}{2}(1-R_{12}^2R_{23}^2)\xi^2 + iR_{12}R_{23}x_1\xi\}$$

となるので、(10・11) が成立つためには

$$R_{12}R_{23} = R_{13}$$

すなわち

$$R(t_2-t_1)R(t_3-t_2) = R(t_3-t_1) \tag{10・12}$$

でなければならない。R(0)＝1としてこの函数方程式をとけば

$$R(t)=e^{-\gamma|t|} \tag{10.13}$$

が得られる（Q，E，D）

ここに述べた証明はWang—Uhlenbeck（Rev.Mod.Phy.17 323（1945））にあるものと少しちがつていて、多次元への拡張がやさしい。（$x_1(t)$，……$x_n(t)$）というn次元のprocess に対しては、$<x_j^2>=1$になるようにnormalize した上で、上に述べた証明でのx，ξ，をすべてベクトルとして扱えばcorrelation matrix

$$R(t_2-t_1)\equiv<\overleftarrow{x}(t_0)\overrightarrow{x}(t_0+t)>$$

$$=\|<x_i(t_0)\,x_j(t_0+t)>\|$$

について（10.12）が直ちに証明され、その解として

$$R(t)=e^{-\Gamma|t|} \tag{10.14}$$

が導かれる。ここにΓはn次元のmatrixである。すなわち、correlation matrixが

$$\frac{dR}{dt}=\Gamma R \tag{10.15}$$

という方程式をみたすことが（$x_1 \cdots x_n$）がMarkoffian—Gaussian processをなすための必要条件なのである。

§11 Riceの方法

Eq.（8.5）に戻ろう。$u(t)$，$f(t)$を（9.1）のようにFourier 展開したとすれば、それらのFourier 係数の間に

$$i\omega u(\omega)=-\beta u(\omega)+f(\omega) \tag{11.1}$$

が成立つことはあきらかである。したがつて

$$u(\omega)=\frac{f(w)}{\beta+iw} \tag{11.2}$$

（9.7）のように、u，fについてpower spectra を定義するならば（11.2）

は直ちに

$$G_u(\omega)=\frac{1}{\gamma^2+\omega^2}\;G_f(\omega) \tag{11. 3}$$

を与える。

f(t)をGaussian仮定すれば、u(t)もGaussianである。
なぜならば、u(t)は(8.7)又は(8.8)で与えられているようにf(t)について linearであるから、$u(t_1)\,u(t_2)\cdots u(t_n)$ の分布は $f(t_1)\cdots f(t_n)$ のGauss 分布とともにGauss 分布をなすからである。したがつて、process u(t)はそ correlation function $<u(t_1)\,u(t_2)>$ によつて完全に規定されるが、それは(9.10)によつて(11.3)のFourier 変換として与えられる。これで問題は完全にとけたことになる。

これがRiceの方法である。Stochantic eq. が多次元であつても、既知のrandom process に対し求めるべき多次元のprocess が定数係数の線型方程式として支えられていればこれが使えることは明らかであろう。方程式の階数は何も一階とは限らない。これはすこぶる簡明な方法であるが、もちろん、Gaussien proeess の場合に限る。

random force f(t) が(8.10)の条件をみたせば(11.3)

において

$$G_f(\omega)=\mathrm{const}=B \tag{11.4}$$

したがつて Bを定義として

$$G_u(\omega)=\frac{B}{\gamma^2+\omega^2} \tag{11.5}$$

uは

$$<u(t_0)\,u(t_0+t)>=<u^2>e^{-\gamma t} \tag{11.6}$$

なるcorrelation fumction をもつ。もしequipartition law

$$<u^2>=\frac{RT}{m}\qquad (m=\text{覧量}) \tag{11.7}$$

を要求すると(11・5)のBは

$$B=\frac{2\gamma RT}{m} \tag{11.8}$$

でなければならない。すなわち、random force $f(t)$は

$$<f(t_1)\ f(t_2)>=\frac{2\gamma RT}{m}\delta(t_1-t_2) \tag{11.9}$$

というcorrelation function をもつことになる。これは、systematic force をあらわすγ，すなわち抵抗係数と、fluctuating force とが関連していることを示すものである。ここではこれをequipartition law から導いたが、前にもふれたように、これは一般的なfluctuation-dissipation therem の特別な場合にほかならないのである。
多次元の問題として簡単なものは調和振動子のブラウン運動

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{u}=-\omega_0^2 x-\gamma u+f(t)\\ \dot{x}=u\end{array}\right. \tag{11.10}$$

である。読者にゆだねるがRice の方法でとくことはやさしい。
(8・10)の仮定のもとに（u，x）はMarkoffian Gaussianである。これがMarkoffian であることは(11・10)がu，xについて1階だからである。この2次元process の correlation matrixを(10・14)の形に求めるにはどうしたらよいか。
読者の演習に委ねる。

(11・10)で$\omega_0=0$とすれば自由なブラウン粒子である。(11・10)の完全な解について$\omega_0\to 0$の極限をとると、自由ブラウン粒子の解を求めることができる。しかしはじめから$\omega_0=0$としてRiceの方法を用いることはできない。その場合

$$G_x=\frac{1}{\omega^2}G_n$$

となつて$\omega\to 0$で発散してしまうからである。これはブラウン粒子が$t\to\infty$とともに$x\to\infty$に拡散することに対応する。この困難を避ける上述の姑息な

方法（$\omega_0 \to 0$）も演習としては面白いが、後にもつと一般的な強力な方法を述べることにする。

編集部より

１２月号で予告しました本講義ノートの別刷を作製しました。入用の方は御連絡下さい事務が煩雑になりますので研究室単位ぐらいでまとめて注文下されば幸です。ゼミナール用にストックされてはいかがですか、費用は実費として送料共１０ページあたり１５円位だと思います。
御注文の方にはⅠ，Ⅱ，Ⅲ をまとめてお送りし、後の分は毎月出来次第発送する予定です。